日本心理学会第85回大会一般研究発表

反復試行における反応の揺らぎを表すパラメタを組み込んだIRTモデルの提案

会員番号　947530
東北大学　倉元直樹

問題の所在 (1)

- 南風原 (1984) は、Lord (1980) が IRTモデルにおける特定項目 j に対して特定の被験者 i が正答する確率（個人正答確率）π_{ij} がモデル上の正答確率と等しくならない（ $\pi_{ij} \neq P_j(\theta_i)$ ）ことに３種類の実用的な解釈を与えたと述べている。
- 同時に、南風原 (1984) は特性値 θ と古典的テスト理論における真の得点 τ_{ij} とを同一視できないことを示した。
- 本研究では、累積正規モデルでこの問題を再解釈することにより、独自の項目反応モデルが導かれる可能性を示す。

問題の所在 (2)

- Lord (1980) の３つの解釈は以下の通りである。
  a. $P_j(\theta_i)$は被験者 *i* が項目 *j* と同じ特性関数を持つ項目からランダムに選ばれた項目に正答する確率
  b. $P_j(\theta_i)$ は被験者 *i* と同じ特性値 *i* を持つ被験者からランダムに選ばれた被験者が項目 *j* に正答する確率
  c. a と b の解釈を同時に行う（以上、南風原, 1984 による）
- 南風原 (1984) はこれらの解釈が $\pi_{ij} \neq P_j(\theta_i)$ と実質的に矛盾することを示した。

本研究における基本モデル (1)

- 本研究では、南風原 (1984) の指摘を踏まえつつ、Lord (1980) の「b」の解釈について検討を加える。
- 結果として、反復試行の揺らぎを組み込んだモデルを提案する。
- 古典的テスト理論における特定項目 j に対する特定の被験者 i の反応に関わる項目特性 t_{ij} と、潜在特性 θ との間に以下の (1) 式のような線形関係を仮定する。

$$t_{ij} = \rho_j \theta + \sqrt{1 - \rho_j^2}\,\varepsilon_{ij} \tag{1}$$

本研究における基本モデル (2)

- t_j、および、θ は標準正規分布に従うとする。
- 上記の条件の下、ρ_j は t_j と θ との相関係数と一致する。
- ε_{ij}は被験者 i と項目 j との相性（交互作用）に関わる確率変数とする。
- ε_{ij}は被験者 i と項目 j との組み合わせにおいては固定値だが、母集団全域において θ とは独立に標準正規分布に従うとする。
- その結果、 $\varepsilon_{ij|\theta}$ の分散は θ の値によらず均一となる。

累積正規モデル

- Thissen & Steinberg (1986) によれば、累積正規モデルは、Rasch (1960)、Birnbaum (1968) らによる Logistic Model 以前に Richardson (1936) らによって開発された項目反応モデルである。
- ２値型の項目反応を潜在特性 θ と項目 j に対する正答誤答を分ける閾値 l_j に関わる反応について、例えば、次ページの図1のように図式化される。
- 図1は、池田 (1977) に基づいて作成したものである。

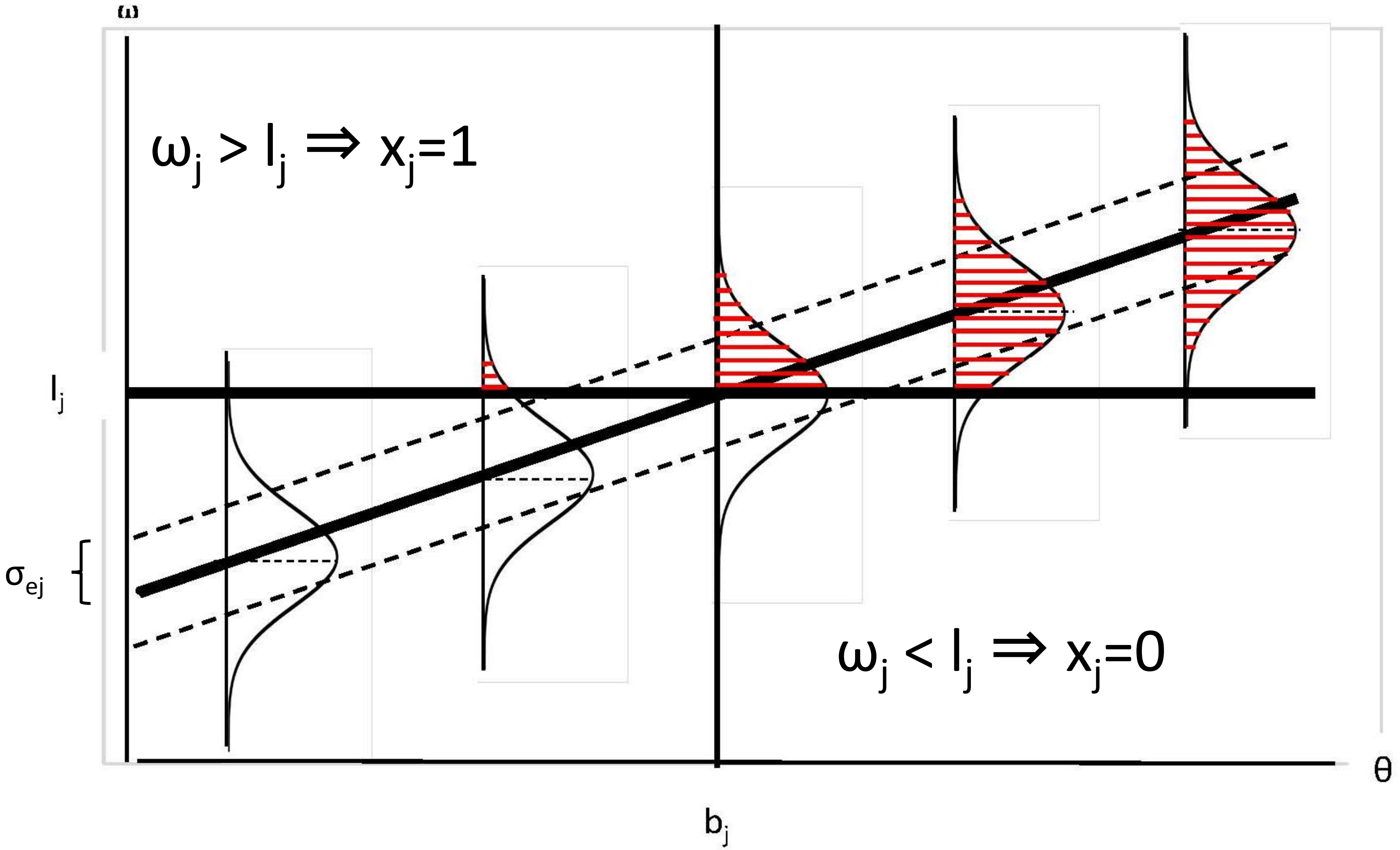

図1. 累積正規モデルの項目反応図式（池田，1977による）

項目反応の古典的基礎モデル (1)

- 図1の縦軸について、t_{ij} を持つ被験者 i の項目 j に対する反応モデルを改めて図式化すると、以下の図2のように表現することができる。

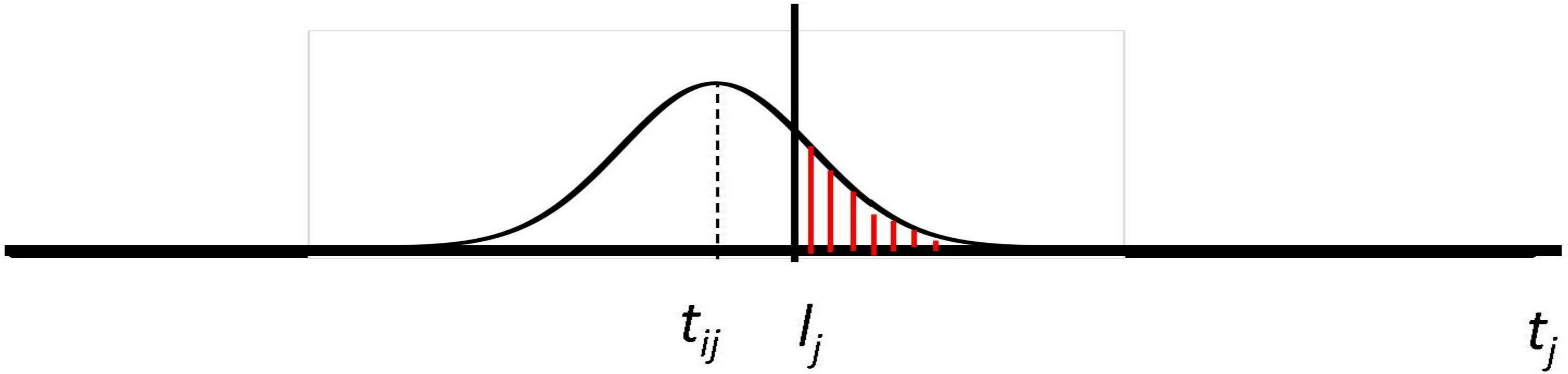

図2. 項目反応の古典的基礎モデル

項目反応の古典的基礎モデル (2)

- 古典的テスト理論の基礎モデルに従って ω_{ijk} を示す。
- e_j は項目 j の非信頼性を表し、平均0、分散 $\sigma_{e_j}^2$ に従うランダムな測定誤差とする。
- なお、k は測定機会を表す添え字である。

$$\omega_{ijk} = t_{ij} + e_{ijk} \tag{2}$$

- ω_{ij} の分布は、以下の (3) 式で表される。

$$\omega_{ij} \sim \mathrm{N}\left(t_{ij}, \sigma_{e_j}^2\right) \tag{3}$$

項目反応の古典的基礎モデル (3)

- その結果、t_{ij}を持つ被験者の x_{ij} の期待値、すなわち、項目 j に対する正答確率 π_{ij}は、以下の (4) 式で表される。

$$\pi_{ij} = \mathrm{E}(x_{ij}) = P(t_{ij}) = 1 - \varphi(l_j - t_{ij})$$
$$= \varphi\left((t_{ij} - l_{ij})/\sigma_{e_j}\right) \qquad (4)$$

- (4) 式を図示したのが図2 である。

潜在特性 θ と項目反応との関係 (1)

- 次に、潜在特性 θ と項目 j の正答確率 $P_j(\theta)$ との関係を考える。
- (1) 式より、θ で条件づけられた t_j の分布は (5) 式で表される。

$$t_{j|\theta} \sim \mathrm{N}\left(\rho_j \theta, 1 - \rho_j^2\right) \tag{5}$$

- $t_{j|\theta}$ と e_j は独立なので、以下の (6) 式が得られる。

$$\omega_{j|\theta} \sim \mathrm{N}\left(\rho_j \theta, 1 - \rho_j^2 + \sigma_{e_j}^2\right) \tag{6}$$

潜在特性θと項目反応との関係 (2)

- その結果、θの関数としての項目jの正答確率$P_j(\theta)$は以下の(7)式で表される。

$$P_j(\theta) = 1 - \varphi\left(\left(l_j - \rho_j\theta\right)/\sqrt{1 - \rho_j^2 + \sigma_{e_j}^2}\right)$$

$$= \varphi\left(\left(\rho_j\theta - l_j\right)/\sqrt{1 - \rho_j^2 + \sigma_{e_j}^2}\right) \qquad (7)$$

項目反応モデルの導出 (1)

- (7) 式を展開する。

$$P_j(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-\rho_j^2+\sigma_{e_j}^2\right)}}\int_{\omega_j}^{\infty} exp\left(-\frac{\left(\omega_j-\rho_j\theta+l_j\right)^2}{2\left(1-\rho_j^2+\sigma_{e_j}^2\right)}\right)d\omega_j$$

$$a_j = \frac{\rho_j}{\sqrt{1-\rho_j^2}} \qquad (8)$$

$$b_j = \frac{l_j}{\rho_j} \qquad (9)$$

項目反応モデルの導出 (2)

さらに、$u = \frac{\omega_j - \rho_j \theta}{\sqrt{\left(1-\rho_j^2+\sigma_{e_j}^2\right)}}, \frac{d\omega_j}{du} = \sqrt{\left(1 - \rho_j^2 + \sigma_{e_j}^2\right)}$　とすると、

$$P_j(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{l_j - \rho_j \theta}{\sqrt{1-\rho_j^2+\sigma_{e_j}^2}}}^{\infty} exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 1 - \varphi\left(\frac{l_j - \rho_j \theta}{\sqrt{1 - \rho_j^2 + \sigma_{e_j}^2}}\right) = \varphi\left(\frac{\rho_j \theta - l_j}{\sqrt{1 - \rho_j^2 + \sigma_{e_j}^2}}\right)$$

項目反応モデルの導出 (3)

- ここで、

$$\frac{\rho_j\theta-l_j}{\sqrt{1-\rho_j^2+\sigma_{e_j}^2}}=\frac{\sqrt{1-\rho_j^2}}{\sqrt{1-\rho_j^2+\sigma_{e_j}^2}}\times\frac{\rho_j}{\sqrt{1-\rho_j^2}}\left(\theta-\frac{l_j}{\rho_j}\right)$$

$$f_j=\frac{\sqrt{1-\rho_j^2}}{\sqrt{1-\rho_j^2+\sigma_{e_j}^2}} \qquad (10)$$

項目反応モデルの導出 (4)

- (8)、(9)、(10) 式を用いると、以下の (11) 式が得られる。

$$P_j(\theta) = \varphi\left(f_j a_j(\theta - b_j)\right) \qquad (11)$$

- (11) 式は通常の2パラメタ累積正規モデルに反復試行における反応の揺らぎを表すパラメタ f_j が組み込まれた項目反応モデルとなっている。

個人正答確率と項目反応モデル再考 (1)

- 本研究は (1) 式によって、項目反応変数 t_{ij} が潜在特性 θ へ線形回帰するモデルを基礎に置いた。
- 同じ θ_i を持つ被験者集団における t_{ij} の期待値が $\rho_j\theta$ となるため、$\rho_j < 1$ の場合には、一般的に $\pi_{ij} \neq P_j(\theta_i)$ となる。
- $\rho_j = 1$ のときには ε_j の条件付き分散は 0 となり、$t_{ij} = \theta_i$ となるが、(8) 式より a_j の値が無限大となり、項目反応モデルが成立しない。

個人正答確率と項目反応モデル再考 (2)

- このことからも、南風原 (1984) が問題提起したように、本研究のモデルの下では、Lord の「b」の解釈は一般的には成立しないことが示された。
- ところで、$\sigma_{e_j}^2 = 0$ のとき、$f_j = 1$ となり、本研究のモデルは通常の2パラメタ累積正規モデルと一致する。
- これは、信頼性係数が1となることを意味し、全ての被験者 i に対して、$\pi_{ij} = \mathrm{E}\left(x_{ij}\right) = 1 \text{ or } 0$ が成立する。

個人正答確率と項目反応モデル再考 (3)

- 本研究のモデルの特殊ケースとして２パラメタ累積正規モデルを再解釈すると、同一項目の繰り返し測定に対しては反応の揺らぎは存在せず、反応の揺らぎは同一の難易度を持つ複数の項目に対するものと解釈できる。
- この場合も、個人正答確率と項目反応モデルに関するLord (1980) の３つの解釈が成立すると予想される。
- 南風原 (1984) の $\pi_{ij} = P_j(\theta_i)$ となる「強いモデル」とは異なる意味で「強いモデル」と言える。

個人正答確率と項目反応モデル再考 (4)

- 興味深い結果だが、完全な信頼性を有する項目に古典的テスト理論の適用を論じることに意味があるか否かについては、議論の余地があるだろう。
- 次ページの図3は本研究のモデルに基づき、図1を再解釈したものである。

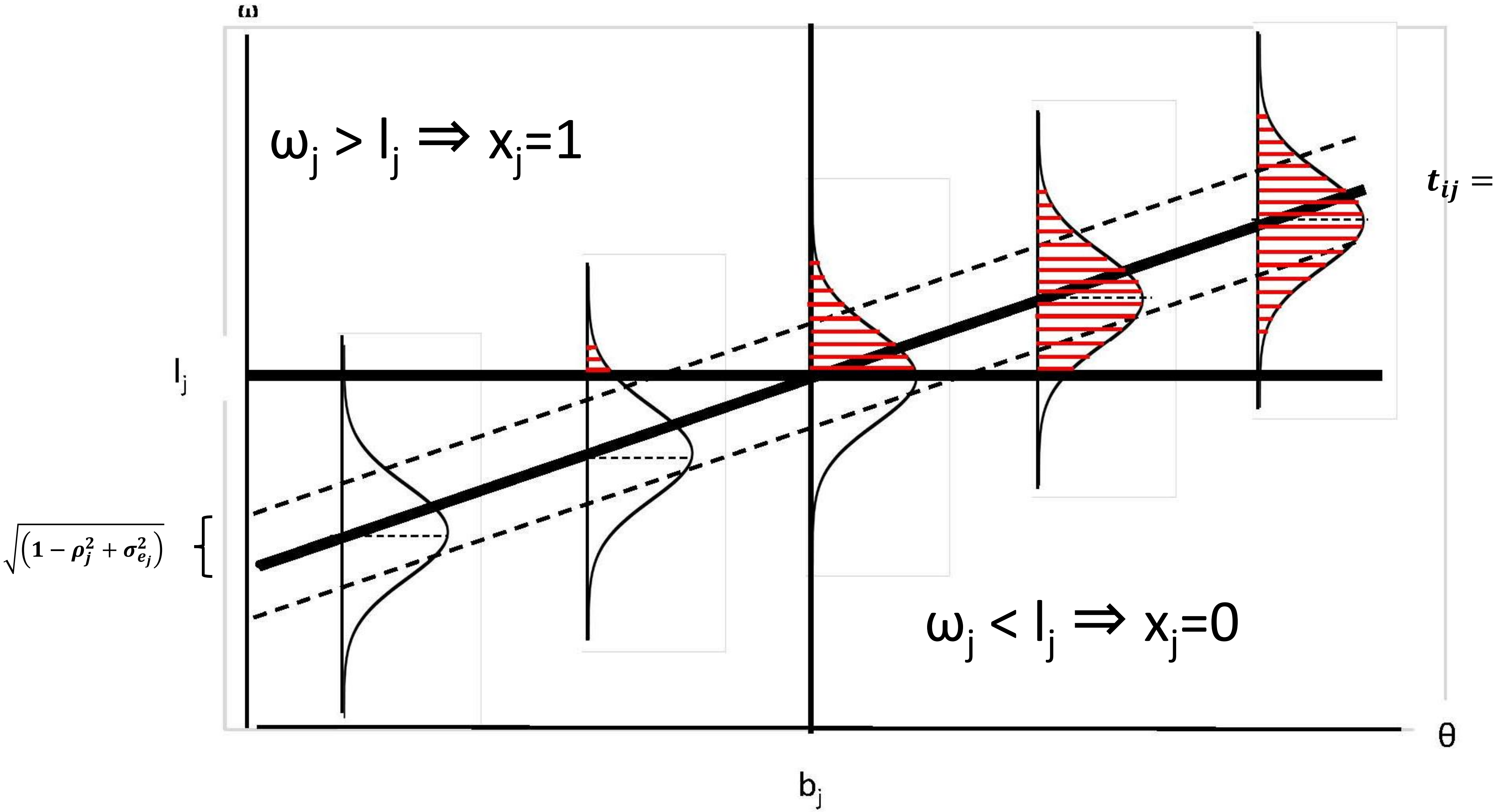

図3. 累積正規モデルの項目反応図式（再解釈）

パラメタ f について

- 最後に、反復試行の揺らぎを表すパラメタ f_j について検討する。
- ρ_j と $\sigma^2_{e_j}$ に項目を示す j の添え字があることから、(11)式ではパラメタ f を項目パラメタの一つとして扱った。
- 全項目について潜在特性 θ との相関係数が同一であり、信頼性係数も同一ならば、パラメタ f をテストバッテリ全体のパラメタとして同一の値を与えることができる。

謝辞

- 本稿の作成に当たり、同僚の久保沙織准教授（東北大学）から貴重なアドバイスをいただいた。ここに感謝の意を表する。
- 本研究はJPSP科研費20K20421による成果の一部である。

本件に関わる連絡先：ntkuramt(at)tohoku.ac.jp

文献

- Birnbaum, A. (1968). Some latent trait models and their uses in inferring an examinee’s ability. In F. M. Lord, & M.R. Novick, *Statistical theories of mental test theories*, Reading, MA: Addison-Wiley, 397-479.
- 南風原朝和 (1984). テスト理論への個人正答確率に基づくアプローチ，新潟大学教育医学部紀要，**26** (1)，21-28.
- 池田央 (1977). テスト･スコアの理論，印東太郎編　心理測定･学習理論，森北出版，1-92.
- Lord, F. M. (1980). *Applications of Item Response Theory to Practical Testing Problems.* Hildale, NJ: Erlbaum.
- Rasch, G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests.* Copenhagen: Denmarks Paedagogiske Institut.
- Richardson, M. W. (1936). The relationship between difficulty and the differential validity of a test. Psychometrika, **1**, 33-49.
- Thissen, D. & Steinberg, L. (1986). A Taxonomy of Item Response Models. *Psychometrika*, **51(4)**, 567-577.